МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА



ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики полимеров и кристаллов

Переход от финитного к инфинитному движению в классической механике

#### Выполнил:

Студент 208 группы

Брынкин Я. А.

#### Научный руководитель:

Вед. научн. сотр., профессор, Трибельский М.И

Москва, 2016

# Содержание

1. Введение...............................................................................................................3

2. Постановка задачи...............................................................................................6

3. Теоретическая модель.........................................................................................6

4. Численный расчет и оценка теоретических значений..................................10

5. Выводы...............................................................................................................11

6. Список литературы............................................................................................12

**1. Введение**

Классическая механика - наука, посвящённая решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами. Часто в ней рассматриваются такие задачи, в которых исследуются модельные системы, движение которых можно описать одним дифференциальным уравнением

  (1.1)

Здесь *x* не обязательно декартова координата точки, а параметр *m* не всегда обозначает массу точки. Примерами таких систем могут быть: гармонических осциллятор, математический маятник и т.п.

Если *U* является только функцией координаты *x*, то уравнение движения интегрируется в общем виде, т.е. основная задача динамики решается при произвольной функции *U*. Для этого найдем первый интеграл уравнения движения (1.1). Умножая (1.1) на *,* получим

   (1.2)

  (1.3)

Уравнение (1.2) выражает закон сохранения полной энергии (1.3). Кроме того, (1.3) является дифференциальным уравнением первого порядка, которое можно проинтегрировать в общем виде методом разделения переменных. Имеем [2]

  (1.4)

Откуда

  (1.5)

Роль двух произвольных постоянных в решении уравнения движения играют здесь полная энергия *E* и постоянная интегрирования *С.*

Поскольку кинетическая энергия - величина существенно положительная, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т. е. движение может происходить в областях пространства, где *U(x) < E.*



 **Рис. 1**. Финитное движение в потенциальной яме на отрезке *АВ*.(изменения *х* ограничены неравенством ) и инфинитное движение в области справа от точки *С.*

Рассмотрим пример [1], где зависимость *U(x)* имеет вид, изображенный на Рис.1. Проведя на этом же графике горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению полной энергии, мы сразу же выясняем возможные области движения. Так в изображенном на Рис. 1 случае движение может происходить лишь в области *AB* или в области справа от *С.*

Точки, в которых потенциальная энергия равна полной

 *U(x) = E,* (1.6)

определяют границы движения. Они являются *точками остановки*, поскольку скорость в них обращается в ноль. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение происходит в ограниченной области пространства. Такое движение называют *финитным*. Если же область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, - движение *инфинитно*, частица уходит на бесконечность.

Если *x* лежит в области , т.е частица находится в потенциальной яме, то движение является колебательным. Из (1.1) и вообще из уравнений движения следует, что если силы, действующие на частицу, являются потенциальными и *U* не зависит от *t* явно, то замена в уравнениях движения *t* на *-t* не меняет уравнений движения. Это свойство обратимости движений, происходящих по законам классической механики. В частности, это означает что время движения от  до равно времени обратного движения от  до , т.е . Но период колебания *T* равен

  (1.7)

и согласно (1.5) получим

  (1.8)

причем пределы  и  являются корнями уравнения (1.6) при данном значении *E*. Эта формула определяет период движения в зависимости от полной энергии частицы.

**2. Постановка задачи**

Известно, что частица, помещенная в потенциальную яму, определяемую функцией *U(x)*, будет совершать колебательное движение при условии, что полная энергия частицы *E*>*U(x)* и период колебаний частицы *T,* который зависит от *E,* определяется формулой (1.8).

Вернемся к Рис. 1. Если мы увеличим полную энергию частицы *E* (горизонтальная линия чуть выше)*,* то границы ее движения (область *AB*) увеличатся, соответственно, возрастет и период колебания *T.* Продолжая таким образом "поднимать" *E* до значений, близких высоте барьера , при превышении которого происходит переход от финитного к инфинитному движению, мы будем все больше увеличивать период колебаний. Если же полная энергия частицы становится больше высоты барьера *,* движение становится инфинитным. При этом можно считать, что период колебаний частицы .

Возникает вопрос: по какому закону период колебаний частицы *T* при  будет стремиться к бесконечности, т.е как будет выглядеть зависимость *T(E),* при энергиях, близких к?

**3. Теоретическая модель**

Рассмотрим модельный потенциал *U(x)*

 ** (3.1)

Для данного потенциала  Чтобы ответить на интересующий нас вопрос, сначала рассмотрим, как, движется частица при различных значениях полной энергии *E*. Для этого, воспользовавшись программой *Wolfram Mathematica 10.8,* численно проинтегрируем уравнение движения (1.4) при различных значениях *E,* чтобы получить соответствующие зависимости *x(t).* Для наиболее наглядного показа изменения характера движения частицы возьмем значения энергии *E*=1 и *E*=1.2, при этом будем считать, что *m* = 2.

*E* =1.2

*E* =1

**Рис. 2**. Графики зависимости координаты *x* частицы массы *m* = 2 от времени *t* при различных значениях полной энергии *E*

Полученные графики зависимости *x(t)* соответствуют случаю, когда частица от правой точки поворота движется влево.

Нетрудно заметить, что частица с полной энергией *E =* 1.2, которая близка к энергиидля данного потенциала, преимущественно проводит время вблизи правой точки поворота и быстро "проскакивает" остальной участок потенциальной ямы. Отсюда можно сделать вывод, что для того, чтобы получить основной вклад в период колебаний *Т*, надо правильным образом описать потенциал в окрестности точки поворота, а эта точка близка к максимуму потенциала .



**Рис.3** Движение частицы массы *m* с полной энергией *E* в модельном потенциале *U(x)*

Пусть частица c массой *m* и с энергией *E*, находясь в начальный момент времени в точке поворота, начинает двигаться влево. Воспользовавшись соотношением (1.5), получим выражение

  (3.2)

Для приближенного описания потенциала *U(x)* в окрестности точки *х2* учтем, что при *Е* близкому к  точка  близка к , и разложим его в ряд Тейлора с центром в точке 

 (3.3)

Подставив выражение (3.3) в (3.2) получим



Преобразуем полученное выражение, сделав замену переменных. Пусть

  (3.4)

Тогда исходный интеграл принимает вид

  (3.5)

Определим, чему равен верхний предел интегрирования. Для этого воспользуемся уравнением (1.6) , корнем которого для данного значения энергии *E* является, и разложением потенциала *U(x)* (3.3)



Воспользовавшись выражением (3.4) получаем, что. Тогда (3.5) принимает вид

  (3.6)

С уменьшением координаты *х* величина *y* будет увеличиваться, и при больших *x* можно считать, что . Поэтому для (3.6) можно воспользоваться асимптотическим выражением

 (3.7)

Подставляя в (3.7) выражение (3.4) для *y* и учитывая, что при движении частицы к началу координат величина *х* становится мала по сравнению с, получаем искомую зависимость *T(E)* для потенциала (3.1) в виде

  (3.8)

Здесь мы учли, что период колебаний *T* равен удвоенному времени *t*, которое частица затрачивает на прохождение пути от одной точки поворота, до другой.

**4. Численный расчет и оценка теоретических значений**

Чтобы проверить правильность нашей теоретической формулы (3.8), сравним значения периода колебаний, рассчитанные по этой формуле, с соответствующими значениями *T*, полученными численным интегрированием выражения (1.8) в *Wolfram Mathematica 10.8.*

Для начала, определим значения всех параметров, входящих в (3.8).



Для удобства будем считать, что масса частицы равна .

*Таблица 1.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Полная энергия частицы *E* |  |  |  |  |
| 1,170 | 10,75 | 16,36 | 5.61 | 0,34 |
| 1,175 | 11,02 | 16,57 | 5.55 | 0,33 |
| 1,180 | 11,35 | 16,85 | 5.55 | 0,33 |
| 1,185 | 11,77 | 17,20 | 5.43 | 0,32 |
| 1,190 | 12,36 | 17,71 | 5.35 | 0,30 |
| 1,195 | 13,36 | 18,56 | 5.20 | 0,28 |
| 1,200 | 16,06 | 21,32 | 5,26 | 0,25 |

Из приведенный выше таблицы видно, что значения периода колебаний *Т*, которые были получены численным расчетом, отличаются от соответствующих теоретических на некоторую величину. Эта разница обусловлена тем, что формула (3.8) не учитывает вклад в период того участка движения частицы, который она проходит быстро.

Также нетрудно заметить, что полученное несоответствие между значениями периодов колебаний при приближении полной энергии *E* частицы к высоте барьера снизу уменьшается. Кроме того, относительная погрешность  при  также уменьшается, что говорит о том, что точность аналитического выражения (3.8) увеличивается по мере приближения *Е* к вершине барьера.

**5. Выводы**

Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод, что формула (3.8) с недостаточной точностью описывает поведение периода колебаний при энергиях, не слишком близких к . Однако, она показывает правильную качественную зависимость *T(E)* в исследуемом диапазоне полной энергии частицы. При приближении  к снизу точность (3.8) монотонно возрастает, а ошибка монотонно стремится к нулю.

**6. Список литературы**

1. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*: Учеб. пособие.: Для вузов. В 10 т. Т.I *Механика*.- 6-е изд., стереот.-М.:ФИЗМАТЛИТ, 2013.-224 с.
2. Халилов В.Р., ЧижовГ.А. *Динамика классических систем*: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МГУ, 1993.-352 с.